Lista 6: Cálculo I

A. Ramos *

May 6, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Aplicações da derivada;
2. Expansão de Taylor.

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Aplicações da derivada

1. Determine as assíntotas e faça o gráfico de $f(x) := \sqrt{9x^2 + 2x + 2}$.

2. Uma partícula P move-se sobre a a curva $y^2 = x$, $x > 0$ e $y > 0$. Se a abscissa x está variando com uma aceleração que é o dobro do quadrado da velocidade da ordenada y. Mostre que a aceleração da ordenada é nula.

3. Um ponto $Q = (x, y)$ está fixo a uma roda de raio de 1m e de centro O, que gira sem escorregamento sobre o eixo x cujo ponto de contato é P. Suponha que a roda gira com uma velocidade angular constante 1 $\,rad/s$. Escreva as velocidades da abscisa e da ordenada em função de $\theta = \angle(OP, OQ)$. *Rpta:* $dx/dt = 1 - \cos(\theta)$ e $dy/dt = \sin(\theta)$.

4. Sejam P, Q dois polinômios tal que $P(a) = Q(a) = 0$ e $Q'(a) \neq 0$. Verifique que
$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P'(a)}{Q'(a)}.$$

5. Calcule os limites

   (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2 + \sin(x)} = 1;$$

   (b)
$$\lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)^{1/3}}{\sin(\pi x^2)} = -\infty;$$

   (c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - 1 + e^{-x^2}}{x^5 - 1 + e^{4x}} = \frac{1}{4}.$$

6. Faço o gráfico de uma função contínua f defina em $\mathbb{R}\backslash\{-5, -1, 4\}$ tal que satisfaz (a) $\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$; (b) $\lim_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$; (c) $\lim_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$; (d) $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$; (e) $f(-7) = -2$; (f) $f(1) = 5$ e (g) $f(7) = -2$.

7. Sejam f e g duas funções definidas em $\mathbb{R}$ com g contínua em $x = 0$. Se $f(x) = xg(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Verifique que f é derivável em 0.

8. Suponha que f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f'(x) = 1$ para todo $x \in (a, b)$. Mostre que $f(x) = x - a + f(a)$ para todo $x \in [a, b]$.

9. Faça os gráficos das seguintes funções. Para isso determine os pontos críticos, os extremos relativos, os intervalos de crescimento/decrescimento, os pontos de inflexão, a concavidade e as assíntotas.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

(a)
$$f(x) = (x-1)^2(2x+2)^3.$$

(b)
$$f(x) = \exp(-x^2).$$

(c)
$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}.$$

(d)
$$f(x) = \frac{3+x^2}{x-1}.$$

(e)
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}.$$

(f)
$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

(g)
$$f(x) = \left(\frac{5x}{8-2x}\right)e^{-x}.$$

10. Suponha que f é derivável até a 3ra-ordem no intervalo aberto I e $a \in I$. Se $f^{(2)}(a) = 0$, $f^{(3)}(a) \neq 0$ e $f^{(3)}$ é contínua em a. Mostre que $x = a$ é um ponto de inflexão.

11. Um campo retangular à margem dum rio deve ser cercado, com a excepção do lado ao longo do rio. O custo do material é de 12 reais por metro no lado paralelo ao rio e de 8 reais por metro nos lados transversais. Ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com 3600 reais de material. *Rpta:* Área máxima: 16. 875 m^2. Lado paralelo=150 m.

12. Um cilindro circular reto deve ser inscrito numa esfera de raio R. Encontre a razão entre a altura e o raio da base do cilindro cuja área da superfície lateral seja o máximo possível. *Rpta:* Se h =altura e r =raio da base. Então $h = 2r$.

13. Encontre os valores de a e b para que $f(x) = 2x^3 + ax^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto $(1, -2)$ que pertence ao gráfico de f. *Rpta:* $a = -3$, $b = -1$.

14. Ao construir uma sala de cinema, se estima que se houver de 40 a 80 assentos, o lucro bruto diário é de 16 reais por assento. Mas, se o número de assentos for acima de 80, o lucro diário por assento decresce de 0.08 reais vezes o número de lugares acima de 80. Qual deve ser o número de assentos para que o lucro bruto diário seja o máximo possível? *Rpta:* Número de assento deve ser 140.

15. Mostre que o triângulo isósceles de área máxima que pode se inscrever numa circunferência é uma triângulo equilátero.

16. Dois aviões A e B voam horizontalmente à mesma altitude. O avião B encontra-se ao sudoeste do avião A e 20 km ao oeste e 20 km ao sul de A. Se o avião A está viajando para o oeste a 16 km/min e o avião B está viajando pra o norte a 64/3 km/min, (a) em quantos segundos eles estarão mais perto um do outro; (b) qual será a menor distância entre eles?